Concursul Fractal

A Șaptea Ediție, 19 Octombrie 2025

Problema 1. În triunghiul ABC, fie X, Y și Z picioarele perpendicularelor duse din A, B și C respectiv, iar H-ortocentrul acestuia. Fie M_1 și M_2 mijloacele segmentelor BC și AH Arătați că M_1M_2 este mediatoarea segmentului YZ.

Soluție: Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Este clar că OM_1 este perpendicular pe BC și deci e paralel cu AM_2. La fel, putem afla de exemplu din teorema sinusului în triunghiurile BOM și ABH că $AM_2 = OM_1$, deci patrulaterul format de cele 4 puncte este un paralelogram. Astfel, M_1M_2 este paralel cu OA, deci este perpendicular pe YZ. La fel, $M_1Y = \frac{BC}{2} = M_1Z$, deci M_1M_2 e perpendiculară în triunghiul isoscel M_1YZ, deci este și mediatoare.

Problema 2. Fie ϕ unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 + x = 1$. O vrăjitoare a transformat o prințesă în broască și a aruncat-o într-un lac unidimensional de lungime 1. Vrăjitoarea stă la unul dintre capetele lacului. În fiecare dimineață, vrăjitoarea aduce broasca mai aproape de ea, de la distanța inițială d la ϕd. În fiecare seară, broasca are opțiunea de a sări în direcția opusă vrăjitoarei, depărtându-se cu exact ϕ^2. Broasca știe că undeva pe lac se află o insulă de lungime $\frac{1}{10^{2025}}$, iar dacă ajunge pe ea, prințul care locuiește acolo o va săruta, iar ea va redeveni prințesă. Arătați că, după un număr suficient de mare de zile, broasca va ajunge pe insulă și se va putea transforma înapoi în prințesă.

Soluție: Vom rezolva inițial o versiune mai ușoară a problemei, și anume vom asuma că broasca știe unde se află o insulă de lungime l și vom arăta că poate ajunge acolo. Considerăm $f_1(x) = \phi x$ și $f_2(x) = \phi^2 + \phi x$, care sunt opțiunile de distanță pentru broască după fiecare zi. Vom arăta prin inducție după n că pentru orice număr real y de pe intervalul de la 0 la 1 putem găsi x pe același interval și alege n funcții dintre f_1 și f_2 astfel încât $f_{i_1}(f_{i_2}(\dots f_{i_n}(x)\dots)) = y$. Într-adevăr, dacă știm că putem alege $n-1$ astfel de funcții și un $x+n-1$ alegem $f_{i_n}(x_n) = x_{n-1}$ pentru un x_n anumit, căci imaginea funcției $f_1(x)$ este intervalul de la 0 la ϕ și a funcției $f_2(x)$ este intervalul de la ϕ^2 la 1, astfel orice număr din interval poate fi reprezentat ca $f(x)$ pentru un oarecare x. Acum, știm că pentru cele 2^n alegeri de f_i, avem că $f_{i_1}(f_{i_2}(\dots f_{i_n}(x)\dots))$ sunt funcții având un codomeniu de lungime ϕ^n și care în reuniune dau intervalul de la 0 la 1. Astfel, pentru un interval de lungime l, dacă $\phi^n < \frac{l}{2}$, există un set de funcții, imaginea cărora e în întregime în acel interval. Astfel, alegând aceste funcții (deci făcând săriturile în conformitate cu oordinea lor) Broasca o să ajungă inevitabil pe acel interval, indiferent de punctul de pornire. Acum, dacă broasca nu știe unde anume să ajungă, Ea împarte intervalul de la 0 la 1 în $2 \cdot 10^{2025}$ intervale cu lungime egală și încearcă să ajungă pe fiecare. Într-un moment, ea o să fie pe insulă și o să poate redeveni prințesă.

Problema 3. Într-o companie lucrează 100000 de angajați, fiecare având salariu distinct și stagiu de muncă distinct față de toți ceilalți. În decursul unui an de 365 de zile, începând cu prima zi, directorul aplică o metodă inovativă de organizare a muncii. În fiecare dimineață, el alege un angajat și alege dintre a chema la muncă:

- angajatul respectiv și toți angajații ce au și salariu, și stagiu de muncă mai mare ca el;
- angajatul respectiv și toți angajații ce au și salariu, și stagiu de muncă mai mic ca el.

În ultima zi al anului, directorul analizează prezența fiecărui angajat pe parcursul celor 364 de zile anterioare. Demonstrați că există doi angajați care au avut același program de lucru în toate cele 364 de zile.

Soluție: Fie în plan o sută de mii de puncte, astfel încât fiecare al i-lea punct are coordonata x_i unde x_i este salariul la al i-lea angajat și y_i, unde y_i este stagiul lui. Spunem că două lucruri sunt foarte aproape dacă distanța dintre ele e strict mai mică ca minimul dintre cea mai mică diferență de salariu și cea mai mică diferență de stagiu a 2 angajați. Pentru fiecare dintre cele 364 de persoane alese, desenăm pe rând câte două semidrepte, ambele foarte aproape de aceasta în felul următor. Dacă la lucru merg toate persoanele cu salariu și stagiu mai mare, desenăm o semidreaptă în sus și una în dreapta, ambele foarte aproape de punct, astfel încât semidreapta în sus e mai la stânga și cea în dreapta e mai jos de punct. La fel, dacă la lucru merg toți cu salariu și stagiu mai mic, desenăm o semidreaptă în jos și una în stânga. Acum, planul este despărțit de 364 linii frânte, și este clar că dacă o linie desparte două persoane, ele au avut o zi de lucru diferită, iar dacă nu, atunci nu au avut. Fie că aceste linii împart planul în R regiuni. Putem arăta ușor, prin inducție după numărul de linii, că R=I+N+1, unde N este numărul de linii, iar I- numărul de intersecții. Dacă avem a linii orientate în stânga jos și b linii orientate în dreapta sus, numărul de intersecții a liniilor cu aceeași orientare este cel mult $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$, iar numărul de intersecții a liniilor de orientare diferită e cel mult $2ab$. Astfel, avem R$\leq \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + 2ab + 364 + 1$, unde $a+b$ este egal cu 364. Maximul acestei expresii se atinge din inegalitatea mediilor sau din maximul unei parabole pentru $a = b = 182$ și este strict mai mic ca 100000, deci din cei 100000 de oameni, măcar 2 vor fi în aceeași regiune din principiul cutiei, deci vor avea același grafic.

Problema 4. Găsiți toate funcțiile $f(x)$ din mulțimea numerelor naturale nenule în mulțimea numerelor naturale nenule astfel încât pentru orice pereche de numere naturale a și b cu $a \neq b$ și care nu sunt egale în vreo ordine cu $(2, 4)$:

$$f(a)^b - f(b)^a \mid a^{f(b)} - b^{f(a)}$$

Soluție: Vom arăta inițial o lemă, și anume că pentru orice număr natural x, există un număr natural a astfel încât x fivide $f(a)$ și x îl divide pe a. Într-adevăr, fie p un număr prim care dă restul 1 laîmpărțire la x, și care există datorită Teoremei lui Dirichlet. De acum înainte substituim în relația dată doar valori divizibile la $p-1$. Inițial, dacă a și b sunt două numere divizibile la $p-1$, astfel încât a e divizibil la p, iar b nu e divizibil, e clar că $a^{f(b)} - b^{f(a)}$ nu se divide la p, dar din Teorema Mică a lui Fermat mai știm că dacă atât $f(a)$ cât și $f(b)$ nu se împartla p, atunci $f(a)^b - f(b)^a$ se împarte. La fel și dacă ambele s-ar împărți, dar asta clar nu e posibil. Deci, sau $f(x)$ pentru x divizibil la $p-1$ e divizibil la p dacă și numai dacă x e divizibil la p, sau e divizibil la p dacă și numai dacă x nu e divizibil la p. Dacă e al doilea caz, punem a divizibil la $p-1$ și care dă restul g la împărțire la p, unde g e o rădăcină primitivă modulo p, care există din Teorema Chinezească a Resturilor, și $b = (p-1)^2$. După simplificare, o să avem că p divide $g^{f((p-1)^2)} - 1$, deci $f((p-1)^2)$ e divizibil la $p-1$ care e divizibil la x, și am demonstrat ce am dorit. Dacă e al primul caz și $f(p)$ nu e divizibil la p pentru a și b nedivizibile la p, substituim aceleași valori pentru a și b ca în celălalt caz și obținem același rezultat.
Acum, fie a care e divizibil la $100f(1)$, și $f(a)$ tot e divizibil la $100f(1)$, clar a nu este egal cu 1, 2, sau 4. Avem:

$$f(1) \mid f(a) - f(1)^a \mid a^{f(1)} - 1 \Rightarrow f(1) \mid 1$$

Concludem că $f(1) = 1$, deci avem că $f(x) - 1$ divide $x - 1$ pentru $a = x$ și $b = 1$, deci $f(2) = 2$ și $2^a - f(a)^2$ divide $2^{f(a)} - a^2$. Pentru a mai mare decât 10, se observă ușor că sau $2^{f(a)} \geq a^2$, deci $2^{f(a)} + f(a)^2 \geq 2^a + a^2$ din divizibilitate, deci $f(a) \geq a$, și din $f(a) - 1)$ divide $a - 1$, $f(a) = a$, sau $2^f(a) < a^2$, dar atunci divizibilitatea nu e posibilă din nou căci partea stângă e mai mare. Astfel, pentru a cel puțin 10, $f(a) = a$ și acest rezultat se extinde ușor la $f(x) = x$ pentru orice x natural.